Exercice 1: Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de réels compris entre 0 et 1.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété :" $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)\geqslant 1-\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$".
Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

- Initialisation : $1-x_1\leqslant 1-x_1$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1-x_k)=\prod_{k=1}^{n}\underbrace{(1-x_k)}_{\geqslant 0}\times\underbrace{(1-x_{n+1})}_{\geqslant 0}&\geqslant(1-\sum_{k=1}^{n}x_k)(1-x_{n+1})\\ &\geqslant 1-x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k\\ &\geqslant 1-\sum_{k=1}^{n+1}x_k+\underbrace{x_{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k}_{\geqslant 0}\\ &\geqslant 1-\sum_{k=1}^{n+1}x_k\,.\end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : La récurrence est établie. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)\geqslant 1-\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$.

Exercice 2: Pour $m=-1$, $P:x\mapsto 4x+3$ change de signe.
Pour $m\neq -1$, on reconnaît un trinôme de discriminant $\Delta=4(m-1)^2-12(m+2)(m+1)=-8m^2-44m-20$.
La fonction polynomiale $P:x\mapsto(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6$ est négative si et seulement si la parabole représentative de P est tournée vers le bas ($m+1<0$) et P admet au plus une racine ($\Delta\leqslant 0$).
On cherche donc l'ensemble des m tels que $m+1<0$ et $-8m^2-44m-20\leqslant 0$.

$$\begin{cases}m+1<0\\ -8m^2-44m-20\leqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases}m<-1\\ 2m^2+11m+5\geqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases}m<-1\\ m\notin]-5;-\frac{1}{2}[\end{cases}\iff m\in]-\infty;-5]$$

L'ensemble des réels m pour lesquels la fonction polynomiale $P:x\mapsto(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6$ est négative est l'intervalle $]-\infty;-5]$.

Exercice 3: Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k}=\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod\limits_{k=1}^{n}2k}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}2k\right)^2}=\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}=\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Or $\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k}=\dfrac{1}{2}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}$ d'où $\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

De plus, $\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k}=1\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n-2}\times\dfrac{1}{2n}$ d'où $\dfrac{1}{2n}\leqslant\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k}$.

On en déduit donc que :

$$\frac{4^n}{2n}\leqslant\binom{2n}{n}\leqslant\frac{4^n}{2}$$

Exercice 4:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $(x-1)^2 \leqslant 1 \iff (x-2)x \leqslant 0 \iff ((x-2) \geqslant 0 \text{ et } x \leqslant 0) \text{ ou } ((x-2) \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0) \iff x \in [0;2]$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $x \leqslant \frac{1}{x} \iff \big(x > 0 \text{ et } x^2 - 1 \leqslant 0\big) \text{ ou } \big(x < 0 \text{ et } x^2 - 1 \geqslant 0\big) \iff x \in]-\infty;-1] \cup]0;1]$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(x^2+x-2)^2 \leqslant x(x+1) \iff (x^2+x)^2 - 5(x^2+x) + 4 \leqslant 0 &\iff x^2+x \in [1;4] \\ &\iff x^2+x-1 \geqslant 0 \text{ et } x^2+x-4 \leqslant 0 \\ &\iff x \notin \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\\ &\qquad \text{et } x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]\end{aligned}$$

   D'où $(x^2+x-2)^2 \leqslant x(x+1) \iff x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

4. Soit $x \in [-1;+\infty[$.

$$\begin{aligned}x \leqslant \sqrt{2(x+1)} \iff x \leqslant 0 \text{ ou } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \leqslant 2(x+1) \end{cases} &\iff x \in [-1;0] \text{ ou } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 2 \leqslant 0 \end{cases} \\ &\iff x \in [-1;0] \text{ ou } \begin{cases} x > 0 \\ x \in \big[1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\big] \end{cases} \\ &\iff x \in [-1; 1+\sqrt{3}]\end{aligned}$$

Exercice 5: Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On pose $A+B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Pour $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$ et pour $b \in B$, $b \leqslant \sup(B)$.
Soit $x \in A+B$. $\exists (a,b) \in A \times B$ tel que $x = a+b$. Donc, $x \leqslant \sup(A) + \sup(B)$.
L'ensemble A+B est donc majoré par $\sup(A) + \sup(B)$. Il est non vide et il admet ainsi une borne supérieure $\sup(A+B)$.
Par définition de la borne supérieure comme plus petit des majorants, on a $\sup(A+B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$.

On va montrer l'inégalité dans l'autre sens. Soit $b \in B$.

$$\begin{array}{rcl} \forall a \in A,\ a+b & \leqslant & \sup(A+B) \\ a & \leqslant & \sup(A+B) - b \\ \text{donc, } \forall b \in B,\ \sup(A) & \leqslant & \sup(A+B) - b \\ \forall b \in B,\ b & \leqslant & \sup(A+B) - \sup(A) \\ \text{donc, } \sup(B) & \leqslant & \sup(A+B) - \sup(A) \\ \text{d'où, } \sup(B) + \sup(A) & \leqslant & \sup(A+B) \end{array}$$

Par double inégalité, on obtient $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 6: Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x+2| \leqslant 5 \iff -5 \leqslant x+2 \leqslant 5 \iff x \in [-7,3]$.

2. $|3-x| = x+1$.
   Si $x+1 < 0$ alors il n'y a pas de solution.
   Si $x+1 \geqslant 0$ i.e. $x \geqslant -1$,
   alors $|3-x| = x+1 \iff 3-x = -x-1 \text{ ou } 3-x = x+1 \iff 3 = -1 \text{ ou } x = 1 \iff x = 1$.

3. Le discriminant de l'équation $x^2-3x+3=0$ est strictement négatif, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2-3x+3=0>0$.
De plus, $x-1\geqslant 0 \iff x\geqslant 1$. On cherche donc les solutions dans $[1,+\infty[$.
Soit $x\in[1,+\infty[$. $|x^2-3x+3|=x-1 \iff x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0 \iff x=2$

4. Tout d'abord, si $2x-3<0$ i.e. $x<\frac{3}{2}$, x n'est pas solution. Considérons à présent que $x\geqslant\frac{3}{2}$.
L'équation $x^2-4x+3=0$ admet deux solutions qui sont 1 et 3, donc pour tout $x\in[1,3]$, $x^2-4x+3\leqslant 0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash[1,3], x^2-4x+3=0>0$.
Si $x\in[1,3]$, $|x^2-4x+3|<2x-3 \iff 0<x^2-2x \iff x\notin[0,2]$.
Si $x\notin[1,3]$. $|x^2-4x+3|<2x-3 \iff x^2-6x+6<0 \iff x\in]3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}[$.
Conclusion : $S=]2,3+\sqrt{3}[$.

5. Si $x\geqslant 0$, $|x|+|x+1|=2 \iff 2x+1=2 \iff x=\frac{1}{2}$.
Si $x\in[-1,0[$, $|x|+|x+1|=2 \iff 1=2$.
Si $x<-1$, $|x|+|x+1|=2 \iff -2x-1=2 \iff x=-\frac{3}{2}$.
Conclusion : $S=\left\{\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\}$.

6.
$$\begin{aligned}2<|x+1|<3 &\iff 2<|x+1| \text{ et } |x+1|<3\\ &\iff (2<x+1 \text{ ou } 2<-x-1) \text{ et } (x+1<3 \text{ et } -x-1<3)\\ &\iff x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[\text{ et } x\in]-4;2[\\ &\iff x\in]-4;-3[\cup]1;2[\,.\end{aligned}$$

__**Exercice 7**__: Soit $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$.

1. Si $n+m$ est pair : $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $n+m=2k$ et alors $n-m+1=n-(2k-n)+1=2(n-k)+1$.
$$\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2(n-k)+1}{2}\right\rfloor=\lfloor k\rfloor+\left\lfloor(n-k)+\frac{1}{2}\right\rfloor=k+(n-k)=n.$$

2. Si $n+m$ est impair : $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $n+m=2k+1$ et alors $n-m+1=n-(2k+1-n)+1=2(n-k)$.
$$\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2(n-k)}{2}\right\rfloor=\left\lfloor k+\frac{1}{2}\right\rfloor+\lfloor n-k\rfloor=k+(n-k)=n.$$

__**Exercice 8**__: Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $x+1\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}h(x+1) &= \left\lfloor\frac{\lfloor n(x+1)\rfloor}{n}\right\rfloor-\lfloor x+1\rfloor=\left\lfloor\frac{\lfloor nx+n\rfloor}{n}\right\rfloor-\lfloor x\rfloor-1=\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor+n}{n}\right\rfloor-\lfloor x\rfloor-1\\ &= \left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}+1\right\rfloor-\lfloor x\rfloor-1=\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor+1-\lfloor x\rfloor-1=\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor-\lfloor x\rfloor\end{aligned}$$

La fonction h est 1-périodique sur $\mathbb{R}$. On va l'étudier sur $[0,1[$.
Soit $x\in[0,1[$. On a $\lfloor x\rfloor=0$. De plus,
$$0\leqslant\lfloor nx\rfloor\leqslant nx\Rightarrow 0\leqslant\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\leqslant x<1$$
Donc, pour $x\in[0,1[$, $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=0$.
La fonction h est nulle sur $[0;1[$ et elle est 1-périodique. Elle est nulle sur $\mathbb{R}$ et on obtient l'égalité souhaitée.

__**Exercice 9**__: Soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc $a-1=bq+r$ avec $0\leqslant r<b$.
$$ab^n-1=(bq+r+1)b^n-1=b^{n+1}q+rb^n+b^n-1=b^{n+1}q+b^n(r+1)-1$$

Il reste alors à vérifier la deuxième condition de la division euclidienne, c'est à dire $0 \leqslant b^n(r+1)-1 < b^{n+1}$.

$0 \leqslant r < b \Rightarrow 1 \leqslant r+1 \leqslant b \Rightarrow 1 \leqslant b^n \leqslant b^n(r+1) \leqslant b^{n+1} \Rightarrow 0 \leqslant b^n(r+1)-1 \leqslant b^{n+1}-1 \Rightarrow 0 \leqslant b^n(r+1)-1 < b^{n+1}$

Le reste dans la division est donc $b^n(r+1)-1$.

Exercice 10:
Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété suivante : "7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$".
Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : 7 divise $3+2^2$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie.

$$3^{2n+3}+2^{n+3} = 9(3^{2n+1}+2^{n+2}) - 9\times 2^{n+2} + 2^{n+3} = 9(3^{2n+1}+2^{n+2}) - 7\times 2^{n+2}$$

qui est divisible par 7. Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$.

Exercice 11: Soit $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$xy = 2x+y \iff (x-1)(y-2)-2=0 \iff (x-1)(y-2)=2 \iff \begin{cases} x-1=1 \text{ et } y-2=2 \\ \text{ ou} \\ x-1=-1 \text{ et } y-2=-2 \\ \text{ ou} \\ x-1=2 \text{ et } y-2=1 \\ \text{ ou} \\ x-1=-2 \text{ et } y-2=-1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est $\{(2,4),(0,0),(3,3),(-1,1)\}$.

Exercice 12:

On cherche la décomposition en facteur premier :
$126 = 2\times 63 = 2\times 7\times 9 = 2\times 3^2\times 7$.
$230 = 2\times 115 = 2\times 5\times 23$
Donc pgcd(126,230)=$2\times 3^0\times 5^0\times 7^0\times 23^0 = 2$.
On applique l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{aligned} 230 &= 126\times 1+104 \\ 126 &= 104\times 1+22 \\ 104 &= 22\times 4+16 \\ 22 &= 16\times 1+6 \\ 16 &= 6\times 2+4 \\ 6 &= 4\times 1+2 \\ 4 &= 2\times 2+0. \end{aligned}$$

donc PGCD(126,230)=2.

Exercice 13: On a : $360 = 2^3 3^2 5$. Donc les diviseurs de 360 sont de la forme :

$$a 2^b 3^c 5^d$$

avec $a \in \{-1;1\}$, $b \in \{0;1;2;3\}$, $c \in \{0;1;2\}$ et $d \in \{0;1\}$. 360 admet donc $2\times 4\times 3\times 2 = 48$ diviseurs.
On a $17\,500 = 2^2 5^4 7$. Par la même méthode, $17\,500$ admet $2\times 3\times 5\times 2 = 60$ diviseurs.
On a $\text{PGCD}(17\,500, 360) = 2^2 5 = 20$ et $\text{PPCM}(17\,500, 360) = 2^3 3^2 5^4 7 = 315000$.

<u>**Exercice** 14:</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. On a $k|(n+1)!$ et $k|k$ donc $k|(n+1)!+k$ n'est pas premier.
On a $(n+1)!+k$ qui n'est pas premier pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$.
On a donc trouvé n entiers consécutifs non premiers (le premier étant $(n+1)!+2$).

<u>**Exercice** 15:</u> On a $153 = 3^2 \times 17$ et $42075 = 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 17$.
Donc $a = 3^{a_3} \times 5^{a_5} \times 11^{a_{11}} \times 17^{a_{17}}$ et $b = 3^{b_3} \times 5^{b_5} \times 11^{b_{11}} \times 17^{b_{17}}$ tels que :
$a_3 = b_3 = 2$
$(a_5, b_5) = (0, 2)$ ou $(a_5, b_5) = (2, 0)$
$(a_{11}, b_{11}) = (0, 1)$ ou $(a_{11}, b_{11}) = (1, 0)$
$a_{17} = b_{17} = 1$
Donc les couples (a, b) de $\mathbb{N}^2$ tels que $a \wedge b = 153$ et $a \vee b = 146975$ sont :

$$(153, 42075); (3825, 1683); (1683, 3825) \text{ et } (42075, 153)$$

<u>**Exercice** 16:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$, on cherche $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 - y^2 = n^3$ i.e. $(x-y)(x+y) = n^3$.
Une idée est de chercher $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x - y = n$ et $x + y = n^2$.
Posons $x = \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right)$ et $y = \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right)$.
On a bien $x, y \in \mathbb{Z}$ (car $n^2 + n = n(n+1)$ et $n^2 - n = n(n-1)$ sont pairs) et $x^2 - y^2 = n^3$.

<u>**Exercice** 17:</u> Soient a, n, p, q des entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. $$2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)\underbrace{\sum_{k=0}^{q-1}(2^p)^k}_{\in\mathbb{N}}$$

   Donc $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

2. Par contraposée, supposons que n est composé, alors il existe $p, q \in [\![2; +\infty[\![$ tels que $n = pq$. D'après la question précédente,
   $$2^n - 1 = \underbrace{(2^p - 1)}_{\in[\![2;+\infty[\![}\underbrace{\sum_{k=0}^{q-1}(2^p)^k}_{\in[\![2;+\infty[\![}$$
   donc $2^n - 1$ est composée.
   Conclusion : Si $2^n - 1$ est premier alors n est aussi premier.

3. Supposons $a^n - 1$ premier.

   On peut appliquer la formule de factorisation : $a^n - 1 = (a-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.

   Or, $a^n - 1$ est premier donc $a - 1 = 1$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1$. Donc, $a = 2$ ou $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a^k = 0$.
   La deuxième égalité est impossible car $a \geqslant 2$ donc $a = 2$.
   On applique ensuite la question précédente pour conclure.

<u>**Exercice** 18:</u> Notons M, T et C les points représentant respectivement le mât, le trésor et le cocotier.
Dans le repère $\left(M, \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}\right)$, notons m, t et c les affixes respectives des points M, T, C. Donc $m = 0$ et $c = 30$.
D'après l'énoncé, $2|t - m| + 3|t - c| = 65$ i.e. $2|t| + 3|t - 30| = 65$.
Si $t < 0$, $2|t| + 3|t - 30| = 65 \iff -5t + 90 = 65 \iff t = 5$. Impossible.

Si $t \in [0, 30]$, $2|t| + 3|t - 30| = 65 \iff -t + 90 = 65 \iff t = 25$.
Si $t > 30$, $2|t| + 3|t - 30| = 65 \iff 5t - 90 = 65 \iff t = 31$.
Donc $t \in \{25, 31\}$. Or $t \notin [0, 30]$, donc $t = 31$.
Le trésor se situe à 1 pas du cocotier en ayant le mât dans le dos.

Exercice 19: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Il suffit de remarquer que l'interrupteur n est manipulé autant de fois qu'il a de diviseurs positifs dans n. Autrement dit, l'ampoule numéro n est allumée si et seulement si le nombre de diviseurs positifs de n est impair.
Factorisons n en produits de facteurs premiers : $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_r}^{\alpha_r}$, alors le nombre de diviseurs positifs de n est : $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$. Pour que ceci soit impair, il faut que tous les $\alpha_i + 1$ soient impairs, c'est-à-dire que tous les α_i soient pairs. Autrement dit, l'ampoule numéro n est allumée si et seulement si n est un carré parfait.
Les ampoules allumées sont donc en position $1, 4, 9, 16, \ldots$.